UGAONA MODULACIJA

- Ugaona modulacija spada u nelinearne postupke modulacije
- Dobijeni modulisani signal je kontinualan
- Kao i u slučaju amplitudske modulacije, nosilac ima sinusoidalni talasni oblik
- Osnovni parametri nosioca su amplituda i ugao
- U postupku ***amplitudske*** modulacije ***amplituda*** nosioca je modifikovana u zavisnosti od modulišućeg signala, a ugao ostaje nepromijenjen.
- U postupku ugaone modulacije amplituda nosioca ostaje nepromijenjena, a njegov ugao se modifikuje modulišućim signalom i postaje karakterističan parametar u kome je sadržana prenošena poruka.

Nosilac:

$$u_0(t)=\underbrace{U_0}_{\mathrm{AM}}\cos(\underbrace{\omega_0}_{\mathrm{FM}}t+\underbrace{\varphi(t)}_{\mathrm{PM}})$$

Ako fazu učinimo direktno zavisnom od modulišućeg signala:

$$\varphi = \varphi(t) = \gamma\,[u_m(t)]$$

Opšti izraz za ugaono modulisan signal glasi:

$$u(t) = U_0 \cos \Phi(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = U_0 \cos\{\omega_0 t + \gamma\,[u_m(t)]\}$$

Ugao

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) = \omega_0 t + \gamma\,[u_m(t)] = \Phi_0 + \gamma\,[u_m(t)] = \Phi_i$$

naziva se ***trenutna faza***.

Veličina:

$$\varphi(t) = \gamma\,[u_m(t)] = \delta\,\Phi_i$$

koja predstavlja odstupanje trenutne faze Φ_i od vrijednosti $\Phi_0=\omega_0 t$ zove se ***trenutna devijacija faze***.

Izvod trenutne faze $\Phi_i= \Phi(t)$ po vremenu:

$$\omega_i = \frac{d\Phi_i}{dt} = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

naziva se ***trenutna kružna učestanost*** ugaono modulisanog signala.

Odstupanje trenutne kružne učestanosti ω_i od kružne učestanosti nosioca ω_0:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_i - \omega_0 = \delta\omega_i$$

trenutna devijacija kružne učestanosti ugaono modulisanog signala.

Trenutna učestanost ugaono modulisanog signala je:

$$f_i = \frac{1}{2\pi}\omega_i = \frac{1}{2\pi}\,\frac{d\Phi(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi}\,\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Odstupanje trenutne učestanosti f_i od učestanosti nosioca f_0:

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{d\varphi(t)}{dt} = f_i - f_0 = \delta f_i$$

naziva se ***trenutna devijacija učestanosti***.

Preko navedenih veličina možemo da definišemo da li je riječ o faznoj ili frekvencijskoj modulaciji:

1. Ako je trenutna devijacija faze proporcionalna modulišućem signalu, riječ je o ***faznoj modulaciji*** (ΦM, PM).
2. Ako je trenutna devijacija učestanost proporcionalna modulišućem signalu, riječ je o ***frekvencijskoj modulaciji*** (FM).

FAZNA I FREKVENCIJSKA MODULACIJA

1.Fazno modulisani signal je onaj čija je trenutna devijacija faze proporcionalna modulišućem signalu.

$$\delta \Phi_i = \varphi(t) = k_\varphi u_m(t), \quad k_\varphi = \text{const.}$$

Modulišući signal u_m(t) je:

$$u_m(t) = U_m m(t) \qquad U_m = |u_m(t)|_{\max}$$

Vremensku promjenu modulišućeg signala u_m(t) karakteriše normalizovana funkcija m(t) koja zadovoljava uslov da je $|m(t)|<l$, $|m(t)|_{max} = 1$. Stoga je:

$$|\delta \Phi_i|_{\max} = |\varphi(t)|_{\max} = k_\varphi |u_m(t)|_{\max} = k_\varphi |U_m m(t)|_{\max} = k_\varphi U_m = \Delta\Phi_0$$

Veličina $\Delta\Phi_0$ naziva se ***maksimalna devijacija faze*** ili ***devijacija faze***.

$$\Phi_i = \Phi(t) = \omega_0 t + k_\varphi u_m(t) = \omega_0 t + \Delta\Phi_0 m(t)$$

Konačno, izraz za fazno modulisan signal glasi:

$$u(t) = U_0 \cos \Phi(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + k_\varphi u_m(t)] = U_0 \cos[\omega_0 t + \Delta\Phi_0 m(t)]$$

2. Frekvencijski modulisan signal je onaj čija je trenutna devijacija učestanosti proporcionalna modulišućem signalu.

$$\delta f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_f u_m(t); \quad k_f = \text{const.}$$

Maksimalna devijacija učestanosti, ili često samo ***devijacija učestanosti*** biće:

$$|\delta f_i|_{\max} = \frac{1}{2\pi} \left|\frac{d\varphi(t)}{dt}\right|_{\max} = k_f |u_m(t)|_{\max} = k_f |U_m m(t)|_{\max} = k_f U_m = \Delta f_0$$

Ako je riječ o kružnoj učestanosti, trenutna devijacija kružne učestanosti je:

$$\delta\omega_i = \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_\omega u_m(t); \quad k_\omega = 2\pi k_f = \text{const.}$$

Veličina

$$|\delta\omega_i|_{\max} = \left|\frac{d\varphi(t)}{dt}\right|_{\max} = k_\omega |u_m(t)|_{\max} = k_\omega |U_m m(t)|_{\max} = k_\omega U_m = \Delta\omega_0$$

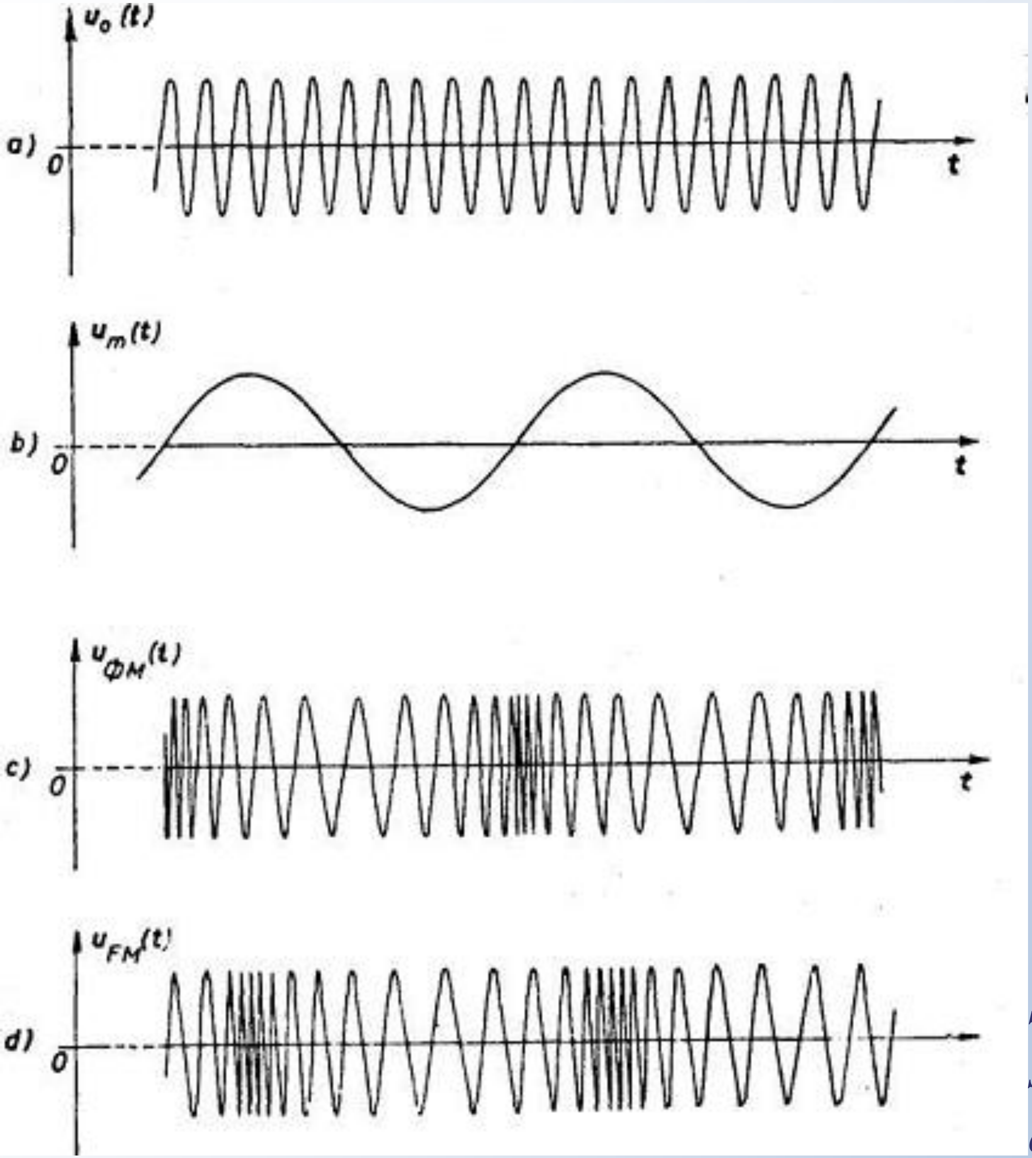
naziva se ***maksimalna devijacija kružne učestanosti*** ili ***devijacija kružne učestanosti***.

Trenutna kružna učestanost je:

$$\omega_i = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 + k_\omega u_m(t) = \omega_0 + k_\omega U_m m(t) = \omega_0 + \Delta\omega_0 m(t)$$

Sada je izraz za frekvencijski modulisani signal:

$$u(t) = U_0 \cos\left[\omega_0 t + k_\omega \int u_m(t)\, dt\right] = U_0 \cos\left[\omega_0 t + \Delta\omega_0 \int m(t)\, dt\right]$$



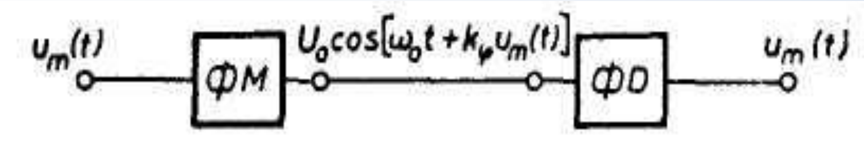
Slika: a) Nosilac; b) modulišući signal; c) fazno modulisan signal; d) frekvencijski modulisan signal

OPŠTA VEZA IZMEĐU FAZNE I FREKVENCIJSKE MODULACIJE

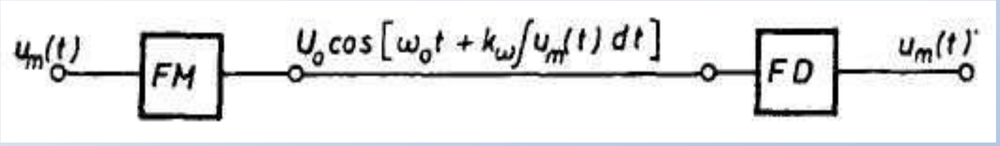
Na slici su prikazane blok-šeme sistema za prenos signala faznom i frekvencijskom modulacijom.

ΦM - fazni modulator; ΦD - fazni demodulator

FM - frekvencijski modulator; FD - frekvencijski demodulator



Slika: Blok-šema za prenos signala faznom modulacijom



Slika: Blok-šema za prenos signala frekvencijskom modulacijom

Na izlazu iz faznog modulatora trenutna devijacija faze nosioca direktno je srazmjerna modulišućem signalu, a na izlazu frekvencijskog modulatora trenutna devijacija faze nosioca proporcionalna je integralu modulišućeg signala.

Što se tiče demodulatora, fazni demodulator na svom izlazu mora dati signal direktno srazmjeran trenutnoj devijaciji faze nosioca na njegovom ulazu, dok frekvencijski demodulator daje signal direktno proporcionalan izvodu trenutne devijacije faze nosioca na svom ulazu.

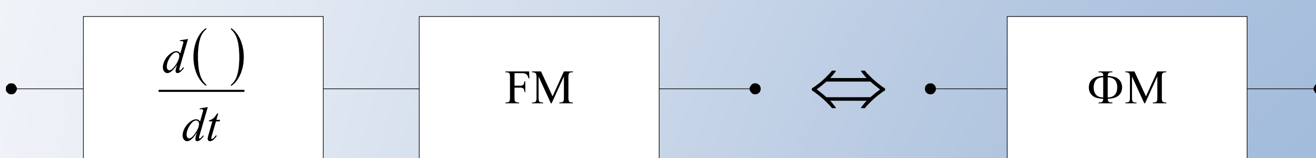
Imajući u vidu odnose između trenutne devijacije faze nosioca i prenošenog signala u modulatoru i demodulatoru, koji karakterišu opštu vezu između fazne i frekvencijske modulacije, moguće je upotrebom posebnih sklopova od faznog modulatora/ demodulatora napraviti frekvencijski i obrnuto.

1. ΦM = diferencijator + F M
2. ΦD=FD + integrator
3. FM = integrator + ΦM
4. FD = ΦD + diferencijator

1. Ako na ulaz FM modulatora dovedemo signal $du_m(t)/dt$ izlaz iz modulatora će biti:

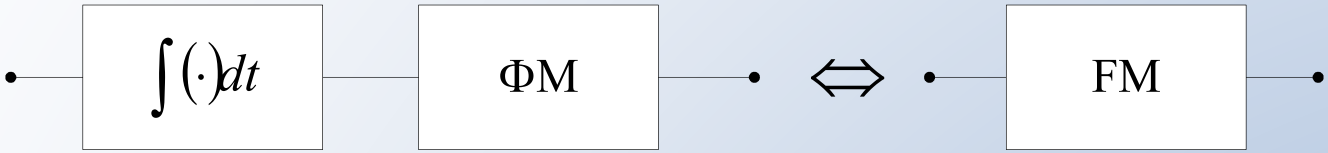
$$u_{FM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + k_\omega u_m(t)) = u_{\Phi M}(t)$$

tj. ΦM modulator će biti kaskadna veza diferencijatora i FM modulatora.

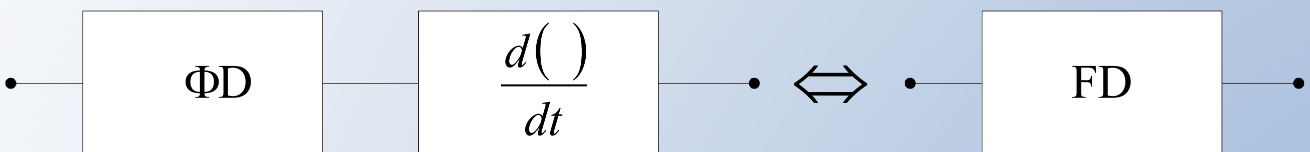


2. Demodulacija je inverzan proces:

3. Ako signal prije ulaska u ΦM modulator prođe kroz kolo za integriranje, na izlazu sistema dobiće se modulisan signal čija je trenutna devijacija faze direktno srazmjerna integralu modulišućeg signala, a to je u stvari frekvencijski modulisani signal.



4. Demodulacija je inverzan proces:



SPEKTAR UGAONO MODULISANIH SIGNALA

Proces amplitudske modulacije se sastoji u translaciji spektra modulišućeg signala, odnosno, svakoj komponenti iz spektra modulišućeg signala čija je učestanost f_{m}, u spektru AM signala odgovaraju dvije komponente simetrično smještene u odnosu na nosilac: f_0+f_m i $f_0—f_m$. Proces amplitudske modulacije je ***linearan*** jer važi zakon superpozicije komponenata. Bitna osobina spektra AM signala je da nema generisanja novih komponenata čije su učestanosti različite od onih koje su nastale opisanom translacijom.

Kod ugaone modulacije to nije slučaj.

- Komponente iz spektra ugaono modulisanog signala vrlo su složeno vezane za komponente modulišućeg signala.
- Spektar UM signala je, čak i u najjednostavnijem slučaju (modulišući signal je jedna sinusoidalna funkcija), ***neograničen,*** tj. u procesu ugaone modulacije jedna komponenta generiše beskonačno mnogo komponenti različitih učestanosti.
- Proces ugaone modulacije je u suštini ***nelinearan*** i zato zakon superpozicije ne važi.

Spektar UM signala kada je modulišući signal u obliku sinusoidalnog test tona

Pretpostavimo da je modulišući signal dat jednostavnim analitičkim izrazom:

$$u_m(t) = U_m \cos \omega_m t$$

Izraz za fazno i frekvencijski modulisan signal ovakvim modulišućim signalom je:

$$u_{\Phi M}(t) = U_0 \cos\left(\omega_0 t + k_\varphi U_m \cos \omega_m t\right)$$

$$u_{FM}(t) = U_0 \cos\left(\omega_0 t + k_\omega \frac{U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t\right)$$

Odnosno, dovoljno je razmatrati sledeći slučaj:

$$u_{UM}(t) = U_0 \cos\left(\omega_0 t + m \cos \omega_m t\right)$$

Veličina *m* predstavlja maksimalnu devijaciju faze ugaono modulisanog signala, naziva se ***indeks ugaone modulacije***, i za slučaj fazno modulisanog signala iznosi:

$$m = k_\varphi U_m$$

a za slučaj frekvencijski modulisanog signala on je:

$$m = \frac{k_\omega U_m}{\omega_m}$$

Izraz za UM signal može da se predstavi u vidu sume prostoperiodičnih komponenti, a za to se koriste određeni identiteti iz teorije Bessel-ovih funkcija. Važi da je:

$$\sin(\alpha + m\sin\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m)\sin(\alpha + n\beta)$$

$$\cos(\alpha + m\sin\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m)\cos(\alpha + n\beta)$$

$$\sin(\alpha + m\cos\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m)\sin\left(\alpha + n\beta + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha + m\cos\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m)\cos\left(\alpha + n\beta + n\frac{\pi}{2}\right)$$

gdje je $J_n(m)$ Bessel-ova funkcija prve vrste n-tog reda za argument m.

Sada je UM signal:

$$u(t) = U_0\cos(\omega_0 t + m\cos\omega_m t) = U_0\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m)\cos\left[(\omega_0 + n\omega_m)t + n\frac{\pi}{2}\right]$$

Ovaj izraz može da se zapiše i u obliku:

$$u(t)=U_0\left\{J_0(m)\cos\omega_0 t+\sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(m)\cos\left[(\omega_0+n\,\omega_m)\,t+n\frac{\pi}{2}\right]+\sum_{n=1}^{\infty} J_n(m)\cos\left[(\omega_0+n\,\omega_m)\,t+n\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

Kako za Bessel-ove funkcije važi:

$$J_{-n}(m)=(-1)^n J_n(m)$$

i važi:

$$\cos\left[(\omega_0-n\,\omega_m)\,t-n\frac{\pi}{2}\right]=(-1)^n\cos\left[(\omega_0-n\,\omega_m)\,t+n\frac{\pi}{2}\right]$$

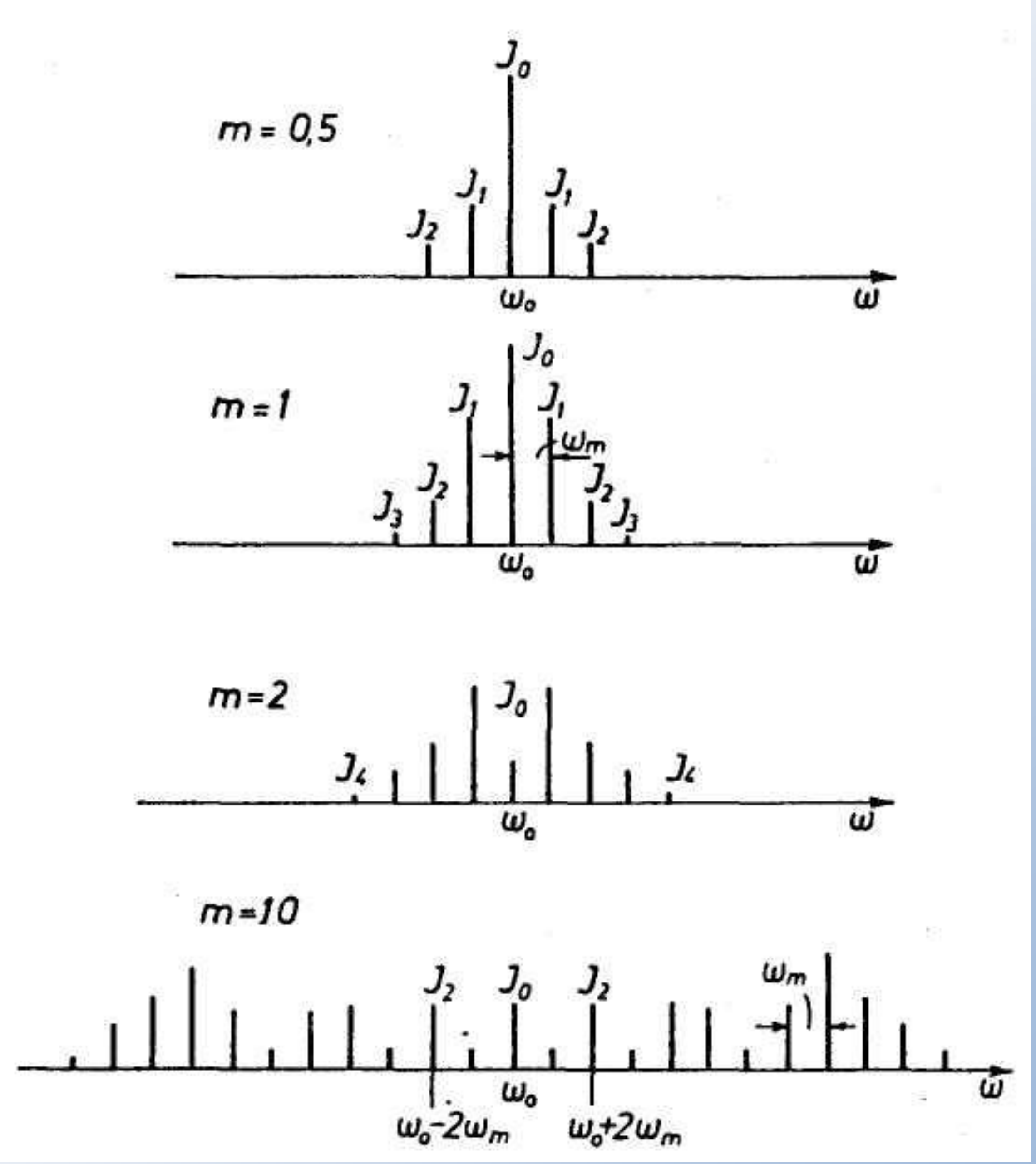
To izraz za UM signal postaje:

$$u(t)=U_0 J_0(m)\cos\omega_0 t+U_0\sum_{n=1}^{\infty} J_n(m)\left\{\cos\left[(\omega_0-n\,\omega_m)\,t+\frac{n\,\pi}{2}\right]+\cos\left[(\omega_0+n\,\omega_m)\,t+n\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

Za dati indeks modulacije *m* i za izabranu vrijednost *n*=1, 2, 3..., Bessel-ova funkcija J_n(m) predstavlja konstantu. U izrazu koji predstavlja ugaono modulisan signal razlikujemo tri dijela:

1. Nosilac čija je amplituda $U_0 J_0(m)$ a učestanost ω_0
2. Beskonačno mnogo komponenti oblika $U_0 J_n(m)\cos(\omega_0-n\omega_m)t$
3. Beskonačno mnogo komponenti oblika $U_0 J_n(m)\cos(\omega_0+n\omega_m)t$

Vidimo da je spektar ***neograničen*** i ***diskretan ,*** a komponente se nalaze lijevo i desno od nosioca, pri čemu je razmak između dvije susjedne komponente u spektru ω_m.



Slika: Amplitudski spektri ugaono modulisanog signala sinusoidalnim test tonom za razne vrijednosti indeksa modulacije m.

Spektar UM signala kada je modulišući signal u obliku sume dva sinusoidalna test tona

Kada je modulišući signal suma dva sinusoidalna test tona, UM signal je oblika:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m_1 \cos \omega_1 t + m_2 \cos \omega_2 t)$$

m_1 i m_2 su indeksi modulacije komponenti čije su učestanosti ω_1 i ω_2.

Gornji izraz za UM signal može da se zapiše i u obliku:

$$u(t) = U_0 \cos\left[\left(\frac{\omega_0 t}{2} + m_1 \cos \omega_1 t\right) + \left(\frac{\omega_0 t}{2} + m_2 \cos \omega_2 t\right)\right]$$

$$u(t) = U_0 \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + m_1 \cos \omega_1 t\right) \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + m_2 \cos \omega_2 t\right) -$$
$$- U_0 \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + m_1 \cos \omega_1 t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + m_2 \cos \omega_2 t\right)$$

Koristeći izraze za Bessel-ove funkcije, dobija se:

$$u(t) = U_0 \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p\,\omega_1 t + p\frac{\pi}{2} \right) \right] \left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(m_2) \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q\,\omega_2 t + q\frac{\pi}{2} \right) \right] -$$

$$- U_0 \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p\,\omega_1 t + p\frac{\pi}{2} \right) \right] \left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(m_2) \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q\,\omega_2 t + q\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$u(t) = U_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) J_q(m_2) \left[\cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p\,\omega_1 t + p\frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q\,\omega_2 t + q\frac{\pi}{2} \right) \right.$$
$$\left. - \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p\,\omega_1 t + p\frac{\pi}{2} \right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q\,\omega_2 t + q\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

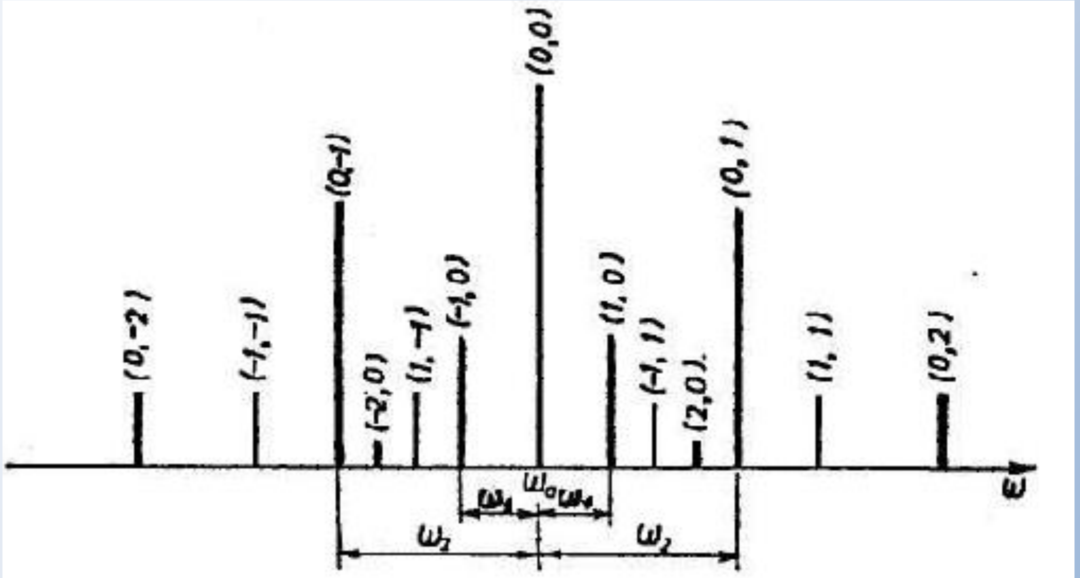
Izraz u srednjoj zagradi predstavlja razvijeni oblik kosinusa sume dva ugla, pa je:

$$u(t) = U_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) J_q(m_2) \cos\left[(\omega_0 + p\,\omega_1 + q\,\omega_2)\,t + (p+q)\frac{\pi}{2} \right]$$

Spektar ovakvog ugaono modulisanog signala je diskretan.

Sve njegove komponente možemo podijeliti u četiri kategorije:

1. p=q=0, nosilac
2. p=0, q≠0; Komponente na učestanostima $\omega_0+p\omega_1$ koje bi se dobile kada bi u modulišućem signalu figurisala samo jedna sinusoida, $m_1\cos\omega_1 t$
3. p≠0, q=0; Komponente na učestanostima $\omega_0+q\omega_2$ koje bi se dobile kada bi u modulišućem signalu figurisala samo jedna sinusoida, $m_2\cos\omega_2 t$
4. p≠0, q≠0; Komponente na učestanostima $\omega_0+p\omega_1+q\omega_2$ koje predstavljaju komponente nastale uslijed međusobnog uticaja dvije sinusoide.



Slika: Amplitudski spektar ugaono modulisanog signala pri čemu je modulišući signal sastavljen od sume dva sinusoidalna test tona čije su učestanosti ω_1 i ω_2, a odgovarajući indeksi modulacije m_1=0,5 i m_2=1

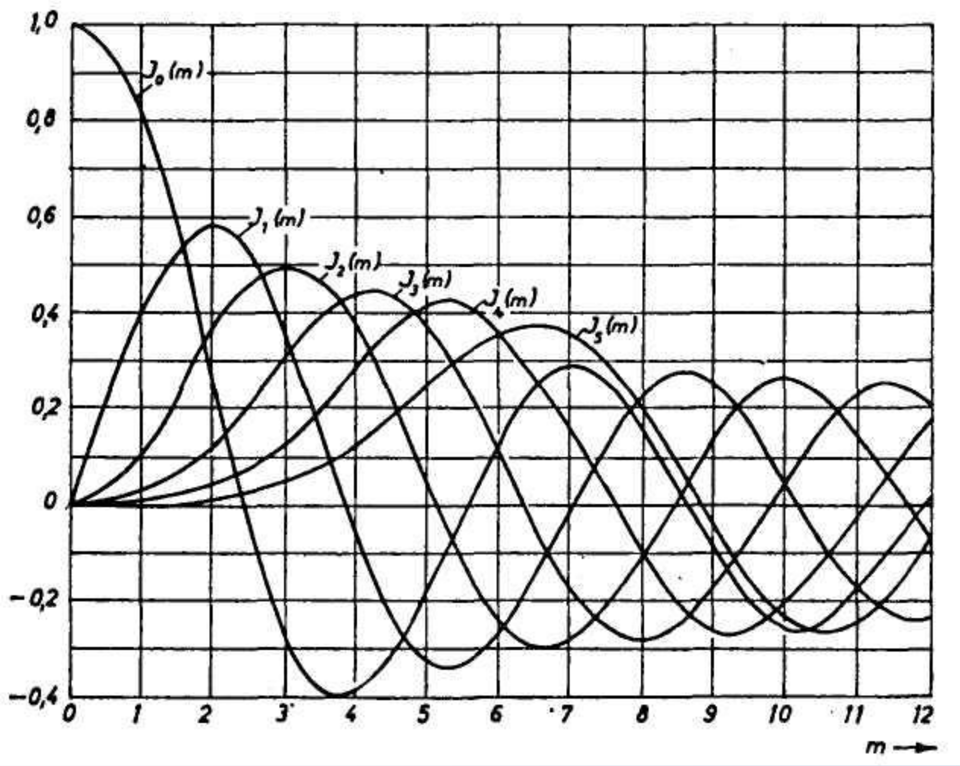
ANALIZA SPEKTRA UGAONO MODULISANIH SIGNALA

Amplitude pojedinih spektralnih komponenti ugaono modulisanog signala zavise od Bessel-ovih funkcija $J_n(m)$.
Da bi se odredila struktura amplitudskog spektra UM signala potrebno je analizirati kako zavisi $J_n(m)$ od indeksa modulacije m i reda funkcije n koji određuje red bočnih komponenti.

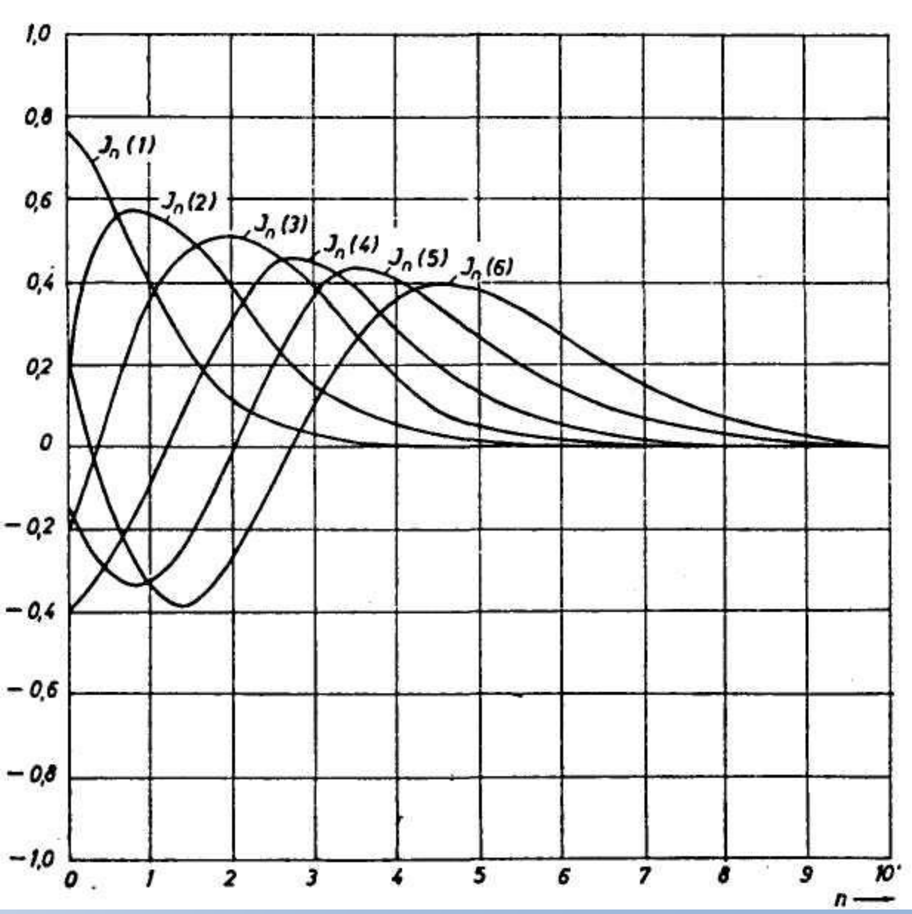
Za neke vrijednosti m i n, Bessel-ove funkcije imaju relativno vrlo malu vrijednost, pa će se one u određenim uslovima moći i zanemariti.

Zanemarivanjem pojedinih komponenti sistem za prenos se može dimenzionisati tako da ima ograničen propusni opseg, a da degradacija kvaliteta prenosa bude u dozvoljenim granicama.

NEKE KARAKTERISTIČNE OSOBINE BESSEL-OVIH FUNKCIJA



Slika: Bessel-ove funkcije $J_n(m)$; n=const, m=var.



Slika: Bessel-ove funkcije $J_n(m)$; m=const, n=var.

1. U slučaju da je indeks modulacije m=0, tada je $J_0(0)=1$, a $J_n(0)=0$, za n>1. Tada nema modulacije, već postoji samo nosilac.
2. Što je red funkcije *n* veći, to je prvi maksimum više udaljen od koordinatnog početka, a taj prvi maksimum je najveća apsolutna vrijednost funkcije za dati red.
3. Sa porastom indeksa modulacije *m* funkcija datog reda *n* mijenja se oscilatorno, uzimajući sve manje i manje apsolutne vrijednosti.
4. Kako red funkcije *n* u slučaju modulacije sinusoidalnim test tonom označava red bočne komponente, to kriva sa slike za usvojeni indeks modulacije *m* pokazuje relativne amplitude bočnih komponenata za cijele vrijednosti *n.*
5. Za male vrijednosti indeksa modulacije *m* Bessel-ove funkcije se mogu aproksimirati polinomom oblika $J_n(m) \cong \frac{m^n}{2^n n!}$
6. Za velike vrijednosti argumenta *m* približno je:

$$J_n(m) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \cos\left(m - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

7. *$J_n(m)$* počinje brzo da opada sa porastom *n* kada je ispunjen uslov *n>m.*
8. Opšta osobina Bessel-ovih funkcija je da je $J_{n \geq m+2}(m) < 0.1$

ŠIRINA OPSEGA UČESTANOSTI POTREBNA ZA PRENOS UGAONO MODULISANIH SIGNALA

Spektar UM signala sadrži neograničeno mnogo komponenti. Njihove amplitude su direktno srazmjerne ili Bessel-ovoj funkciji $J_n(m)$ (u slučaju kada je modulišući signal sinusoidalni ton), ili proizvodu Bessel-ovih funkcija različitih redova i argumenata (u slučaju kada je modulišući signal suma sinusoidalnih tonova).
Sa porastom reda n, vrijednosti funkcije $J_n(m)$ za $n>m$ počinju naglo da opadaju, tj. javlja se čitav niz komponenti zanemarljivo malih amplituda koje se ne prenose. Zadatak je odrediti koje komponente možemo odbaciti a da ne dođe do značajnije degradacije kvaliteta prenošenog signala.

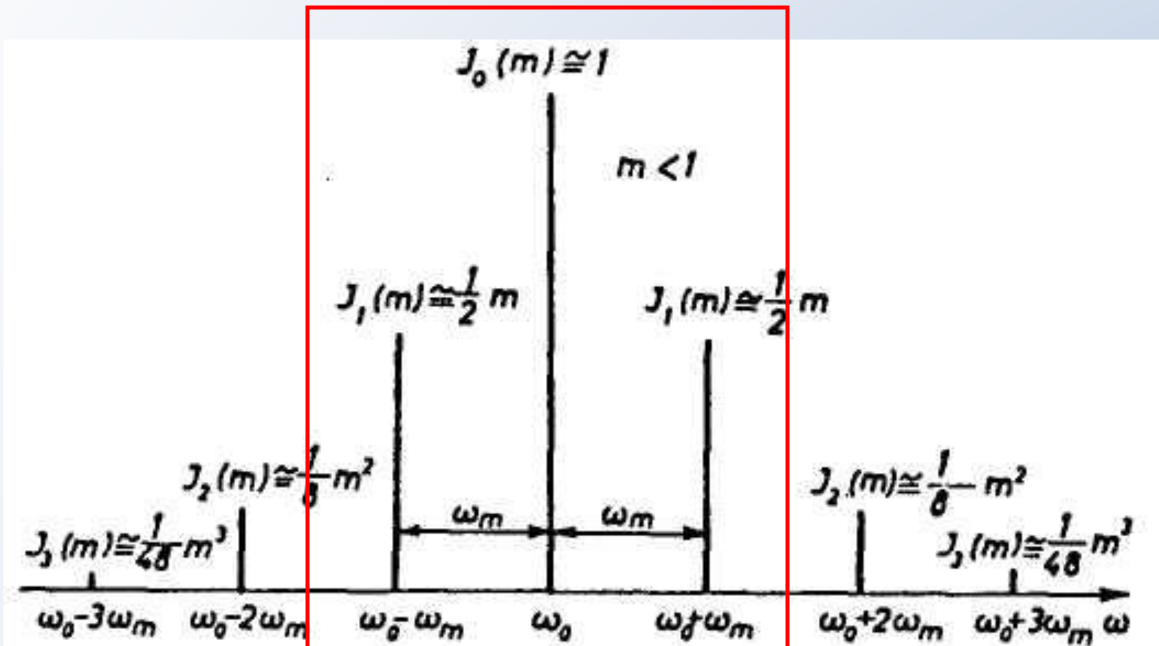
Kriterijum o značajnim bočnim komponentama

Značajnim bočnim komponentama se smatraju sve one spektralne komponente koje nose više od p% snage nemodulisanog nosioca. Najčešće se uzima da je ovaj procenat p=1%.
Može se smatrati da je za prenos UM signala potreban onaj opseg učestanosti izvan koga bilo koja od spektralnih komponenata ima snagu manju od 1% snage nosioca.

Širina spektra UM signala modulisanog sinusoidalnim test tonom

Neka indeks modulacije ima vrijednosti *m*<1*.* Tada je:

$$J_0(m)\cong 1,\ J_1(m)\cong \frac{1}{2}m,\ J_2(m)\cong \frac{1}{8}m^2, J_3(m)\cong \frac{1}{48}m^3,\ldots \qquad J_n(m)\cong \frac{m^n}{2^n n!}$$



Slika: Dio amplitudskog spektra ugaono modulisanog signala sinusoidalnim test tonom sa indeksom modulacije m<1

Na osnovu definicije značajnih komponenti UM signala, može da se pronađe vrijednost indeksa modulacije *m* pri kojoj je dovoljno prenositi samo bočne komponente prvog reda.

Nemodulisani nosilac ima relativnu amplitudu J_0(m)=1. Relativna snaga ove komponente je J_0^2(m)=1.

Relativna snaga jedne bočne komponente prvog reda treba da zadovolji uslov:

$$J_1^2(m) = \left(\frac{1}{2}m\right)^2 = 0{,}01$$

odakle je $m \leq 0.2$.

U svim slučajevima UM signala u kojima je indeks modulacije m≤0.2, dovoljno je prenositi nosilac i prve bočne komponente. Izraz za takav UM signal moći će se približno napisati u sledećem obliku:

$$u(t) \cong U_0 J_0(m) \cos \omega_0 t + U_0 J_1(m) \cos\left[(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{\pi}{2}\right] + U_0 J_1(m) \cos\left[(\omega_0 + \omega_m)t + \frac{\pi}{2}\right]$$

Kako je:

$$J_0(m) \cong 1 \text{ i } J_1(m) \cong \frac{1}{2} m,$$

to je:

$$u(t) \cong U_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m U_0 \cos\left[(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{\pi}{2}\right] + \frac{1}{2} m U_0 \cos\left[(\omega_0 + \omega_m)t + \frac{\pi}{2}\right]$$

Ovaj izraz brojem komponenti i njihovim amplitudama podsjeća na amplitudski modulisan signal KAM tipa. Ali, fazni odnosi se znatno razlikuju.

Izraz za sinusoidalno modulisan signal KAM tipa je:

$$u_{KAM}(t) = U_0' \cos\omega_0 t + \frac{1}{2} m_0 U_0 \cos(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{1}{2} m_0 U_0 \cos(\omega_0 + \omega_m)t$$

Razlika između UM i KAM signala može se najbolje uočiti iz njihove fazorske predstave.

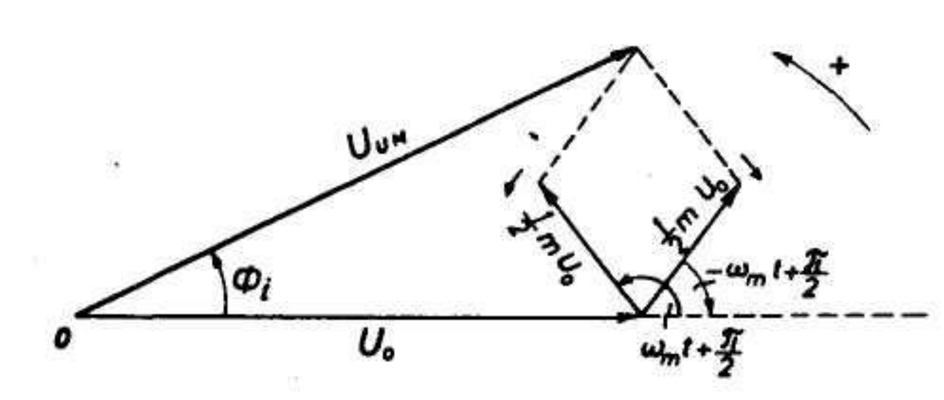
UM signal može da se napiše u obliku:

$$u(t) = R_e\left\{\left[U_0 + \frac{1}{2} mU_0 e^{-j\left(\omega_m t - \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2} mU_0 e^{j\left(\omega_m t + \frac{\pi}{2}\right)}\right] e^{j\omega_0 t}\right\}$$

Izraz u uglastoj zagradi može da se smatra rezultantom tri fazora:

$$U_{UM} = U_0 + \frac{1}{2} mU_0 e^{-j\left(\omega_m t - \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2} mU_0 e^{j\left(\omega_m t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Fazorski dijagram je:



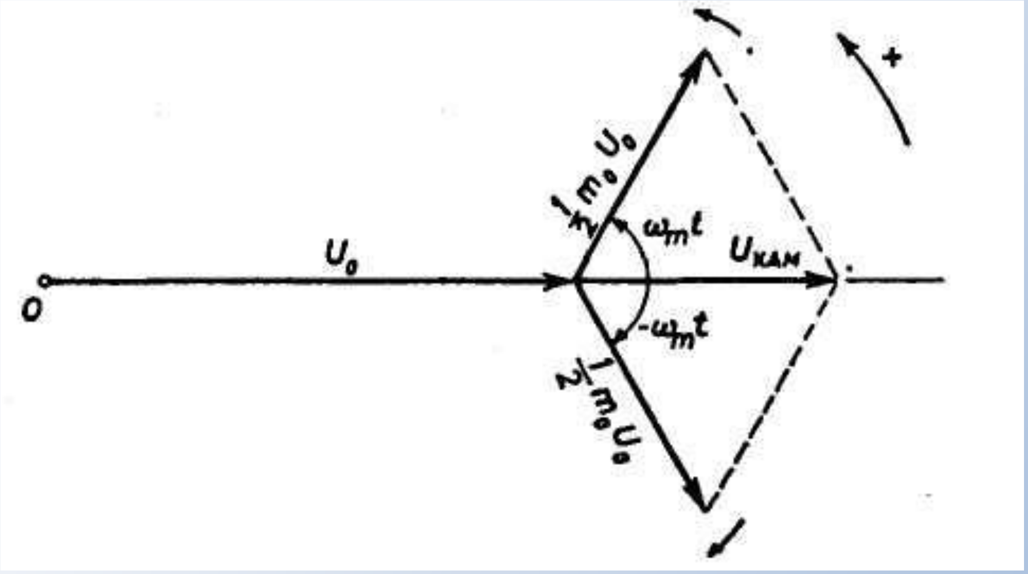
Slika: Fazorska predstava ugaono modulisanog signala sinosuidalnim test tonom pri čemu je indeks modulacije m<0,2

Na sličan način izraz za KAM signal može da se napiše u obliku:

$$u_{\mathrm{KAM}}(t) = R_e\left\{\left[U_0 + \frac{1}{2} m_0 U_0 e^{-j\omega_m t} + \frac{1}{2} m_0 U_0 e^{j\omega_m t}\right] e^{j\omega_0 t}\right\}$$

Izraz u uglastoj zagradi je jedan fazor U_{KAM} koji predstavlja rezultantu tri fazora:

$$U_{\mathrm{KAM}} = U_0 + \frac{1}{2} m_0 U_0 e^{-j\omega_m t} + \frac{1}{2} m_0 U_0 e^{j\omega_m t}$$



Slika: Fazorska predstava amplitudski modulisanog signala tipa KAM sinusoidalnim test tonom.

U slučaju KAM signala rezultantni fazor je uvijek na realnoj osi, i zavisno od stepena modulacije i vrijednosti U_0 mijenja se samo njegov intenzitet.

To nije slučaj sa ugaonom modulacijom. Kod nje rezultantni fazor treba da se pomjera oko svog centralnog položaja, tako da se ugao Φ_i mijenja onako kako diktira modulišući signal. Vrh fazora U_{UM} treba uvijek da opisuje dio kruga sa centrom u tački O, pošto je amplituda UM signala konstantna. Međutim, realna situacija će biti drugačija. Razlog je što smo zanemarili neke bočne komponente, pa je došlo do parazitne amplitudske modulacije.

✓ **Zaključak**:

U opštem slučaju eliminisanje izvjesnih bočnih komponenti dovodi do parazitne amplitudske modulacije.

U slučaju kada indeks modulacije nije mali, spektar ugaono modulisanog signala sadrži više od dvije značajne bočne komponente.
Kako je:

$$J_{n\geq m+2}(m)<0.1$$

to će za ovako ugaono modulisane signale biti dovoljno da se sa svake strane nosioca prenese po $n=m+1$ bočnih komponenti. Potrebna širina opsega za prenos UM signala biće definisana Carson-ovim obrascem:

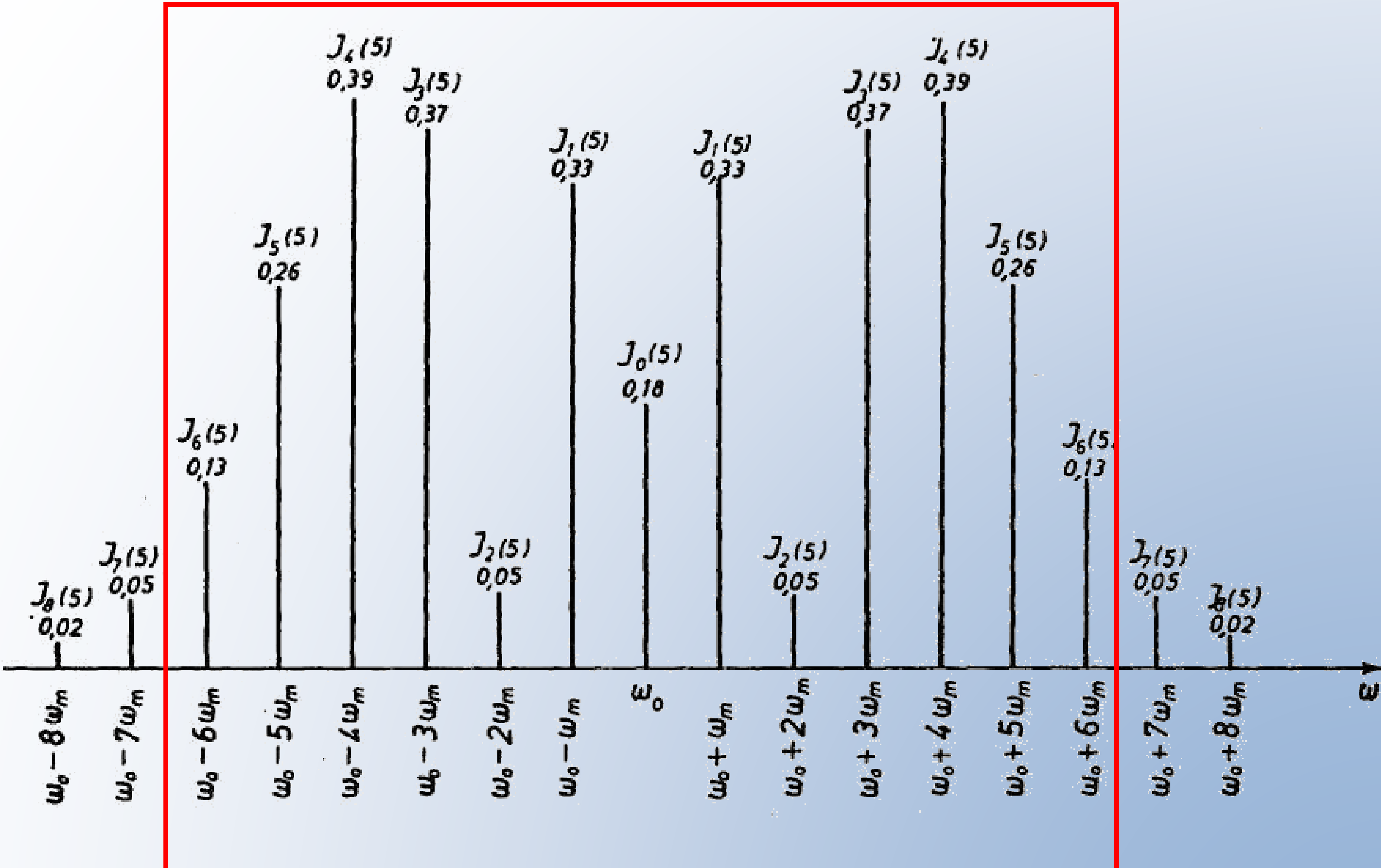
$$B=2f_m(m+1)$$

Carson-ov obrazac za male vrijednosti indeksa modulacije $m<<1$ postaje:

$$B\cong 2f_m$$

dok je za velike vrijednosti ($m>>1$):

$$B\cong 2mf_m$$



Slika: Dio amplitudskog spektra UM signala sinusoidalnim test tonom za m=5

PRINCIPI IZGRADNJE FAZNIH I FREKVENCIJSKIH MODULATORA

Metode generisanja FM signala mogu da se klasifikuju u dvije grupe:

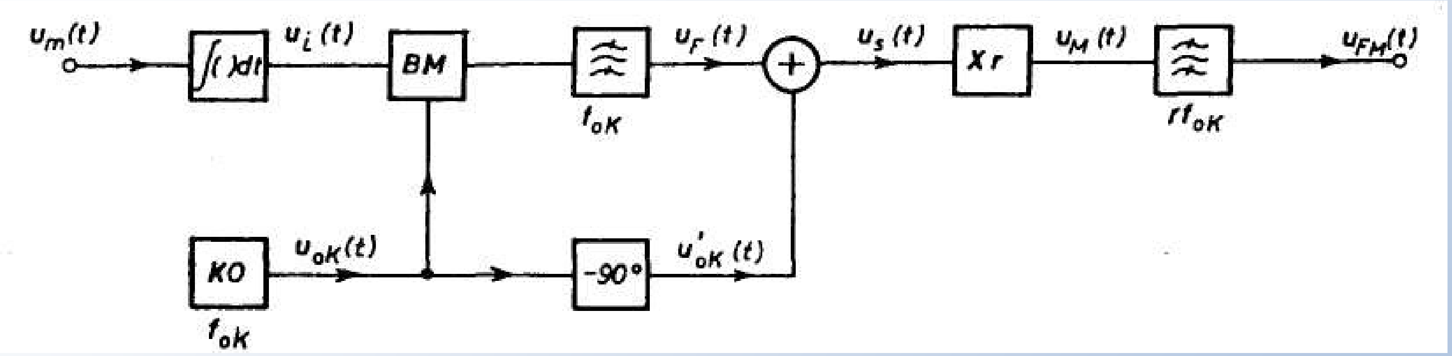
1. indirektne – postupci kojima se FM signali dobijaju pomoću integratora i ΦM modulatora

2. direktne – nekim direktnim postupkom se obezbjeđuje da trenutna devijacija učestanosti bude direktno srazmjerna modulišućem signalu.

1. INDIREKTNI METODI GENERISANJA FM SIGNALA

- Armstrongov modulator

Blok šema Armstrongovog modulatora prikazana je na slici:



Slika: Blok-šema Armstrongovog modulatora

KO je kvarcni oscilator fiksne učestanosti f_{0K}. Napon na njegovom izlazu je:

$$u_{0K}(t) = U_{0K} \cos \omega_{0K} t$$

BM je balansni modulator. Neka je modulišući signal oblika:

$$u_m(t) = U_{m1} \cos \omega_m t$$

Kako modulišući signal napaja integrator, na njegovom izlazu (ulazu u BM) je:

$$u_i(t) \cong \frac{1}{RC}\int U_{m1}\cos\omega_m t \cdot dt = \frac{U_m}{\omega_m}\sin\omega_m t$$

Na izlazu balansnog modulatora, filtrom propusnikom opsega učestanosti izdvaja se signal:

$$u_F(t) = k_U u_i(t)\cdot u_{0K}(t) = k_U\frac{U_m U_{0K}}{\omega_m}\sin\omega_m t\cdot\cos\omega_{0K} t$$

Napon iz KO istovremeno napaja sklop koji unosi fazni pomeraj od -90°, pa se na njegovom izlazu dobija:

$$u'_{0K}(t) = U_{0K}\cos\left(\omega_{0K} t - \frac{\pi}{2}\right) = U_{0K}\sin\omega_{0K} t$$

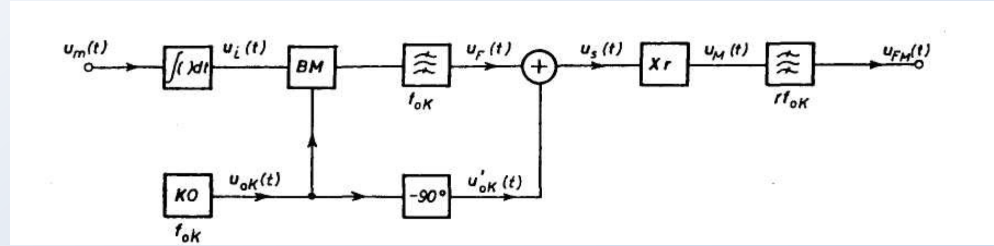
Na izlazu iz kola za sumiranje dobija se napon:

$$u_S(t) = u'_{0K}(t) + u_F(t) = U_{0K}\sin\omega_{0K} t + k_U\frac{U_m U_{0K}}{\omega_m}\sin\omega_m t\cdot\cos\omega_{0K} t$$

Ovaj izraz može da se napiše u obliku:

$$u_S(t) = U_{0K}\left(\sin\omega_{0K} t + \frac{k_U U_m}{\omega_m}\sin\omega_m t\cdot\cos\omega_{0K} t\right) = U_{0K}\sqrt{1+\left(\frac{k_U U_m}{\omega_m}\right)^2\sin^2\omega_m t}\ \sin(\omega_{0K} t + \varphi)$$

Uz: $$\tan\varphi = \frac{k_U U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t$$



i pretpostavku da je: $$\frac{k_U U_m}{\omega_m} \ll 1$$

Može se smatrati:

$$\tan\varphi \cong \varphi \qquad \text{i} \qquad \left(\frac{k_U U_m}{\omega_m}\right)^2 \to 0$$

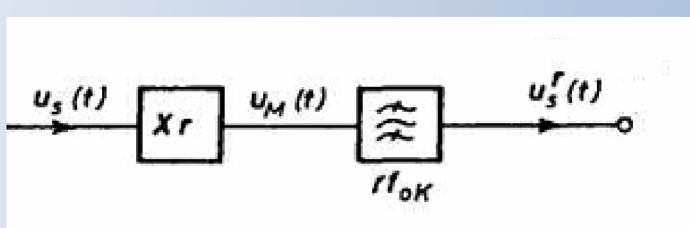
pa je:

$$u_S(t) \cong U_{0K} \sin\left(\omega_{0K} t + \frac{k_U U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t\right)$$

$$u_S(t) = U_{0K} \sin\left(\omega_{0K} t + k_U \int U_m \cos \omega_m t \, dt\right)$$

Ovaj izraz predstavlja frekvencijski modulisan signal. Pretpostavljeni sklop vrši funkciju FM modulatora samo ako je indeks modulacije mali (m<<1). Maksimalni indeks modulacije u ovom slučaju iznosi 0,2 (signal ima nosilac i 2 bočne komponente).

Da bi se povećala devijacija učestanosti, dobijeni signal se dovodi na umnožavač učestanosti (X_r) i odgovarajući filtar:



Umnožavač je nelinearan sklop čija je karakteristika „izlaz — ulaz”:

$$u_M(t) = a_0 + a_1 u_S(t) + a_2 u_S^2(t) + \cdots + a_r u_S^r(t) + \cdots$$

Izlaznim filtrom propusnikom opsega učestanosti čija je centralna učestanost rf_{0K}, r je cio broj, se izdvaja r-ti harmonik signala u_s(t), pa je:

$$u_{FM}(t) = U_0 \sin\left(r\,\omega_{0K} t + \frac{rk_U U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t\right) = U_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega_0}{\omega_m} \sin \omega_m t\right)$$

Dobija se FM signal čija je učestanost nosioca:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{r\,\omega_{0K}}{2\pi} = rf_{0K}$$

a devijacija učestanosti:

$$\Delta f_0 = \frac{1}{2\pi} \Delta\omega_0 = \frac{1}{2\pi} rk_U U_m = \frac{1}{2\pi} r\Delta\omega_{0K} = r\,\Delta f_{0K}$$

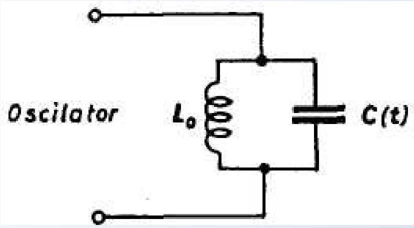
Na ovaj način je povećana maksimalna devijacija učestanosti i indeks modulacije r puta.

2. DIREKTNI METODI GENERISANJA FM SIGNALA

Direktan metod generisanja FM signala podrazumijeva da se učestanost oscilatora direktno mijenja pod uticajem modulišućeg signala. Ovaj princip se po pravilu ostvaruje tako što se neki od parametara oscilatora od koga zavisi učestanost oscilacija ω_0 mijenja u zavisnosti od modulišućeg signala. Najčešće su to kapacitivnost kondenzatora i induktivnost kalema.

Dobra strana ovih modulatora je u tome što se ***direktno*** postiže dovoljno velika devijacija učestanosti, pa nije potreban veliki broj stepeni umnožavača.

- Generisanje FM signala promjenom C ili L u rezonantnom oscilatornom kolu



Rezonantna učestanost oscilatora je:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

Neka je u tom kolu induktivnost L_0=const, a neka se kapacitivnost kondenzatora mijenja (*C=C(t)*):

$$C = C(t) = C_0 + \delta C(t)$$

Trenutna učestanost generisanih oscilacija će biti:

$$\omega_i^2 = \omega^2(t) = \frac{1}{L_0 C(t)}$$

Uvrštavajući izraz za promjenjivu kapacitivnost, trenutna učestanost je:

$$\omega_i^2 = \omega^2(t) = \frac{1}{L_0 [C_0 + \delta C(t)]} = \frac{1}{L_0 C_0} \frac{1}{1 + \frac{\delta C(t)}{C_0}}$$

$$\omega_i = \omega(t) = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\delta C(t)}{C_0}}}$$

Pretpostavimo da su promjene kapacitivnosti male:

$$\delta C(t) \ll C_0$$

Tada će za trenutnu učestanost važiti približno:

$$\omega_i = \omega(t) \cong \omega_0 \left[1 - \frac{\delta C(t)}{2 C_0} \right]$$

$$\omega_i = \omega(t) = \omega_0 + \delta\omega_i$$

Trenutna devijacija učestanosti je:

$$\frac{\delta\omega_i}{\omega_0} \cong -\frac{\delta C(t)}{2C_0}$$

Znak - znači da povećanju kapacitivnosti δC(t) odgovara smanjenje učestanosti. Pretpostavimo da su promjene kapacitivnosti direktno srazmjerne modulišućem signalu $u_m(t)$:

$$\delta C(t) = k_C u_m(t) = k_C U_m m(t) = \Delta C_0 m(t)$$

$$\Delta C_0 = |\delta C(t)|_{max} = k_C U_m |m(t)|_{max} = k_C U_m$$

Trenutna devijacija učestanosti će biti:

$$\delta\omega_i \cong -\frac{1}{2}\omega_0 \frac{\Delta C_0}{C_0} m(t) = -\Delta\omega_0 m(t)$$

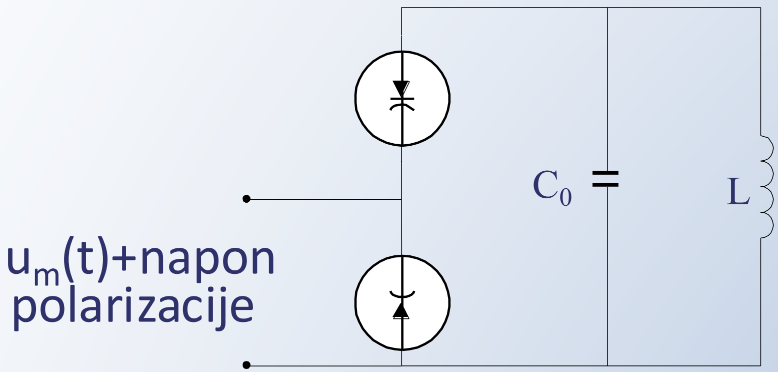
tj. učestanost izlaznog signala:

$$\omega_i = \omega(t) = \omega_0 - \Delta\omega_0 m(t)$$

Pri navedenim uslovima moguće je ostvariti da se trenutna učestanost oscilatora mijenja direktno srazmjerno modulišućem signalu.

- Jedna mogućnost promjene kapacitivnosti je pločasti kondenzator čije se rastojanje između ploča, ili njihova površina, mijenja u skladu sa modulišućim signalom.

- Druga mogućnost je upotreba varikap diode koja je negativno polarisana, a čija kapacitivnost zavisi od napona polarizacije.



™$C(t) << C_0$

FM signale generalno možemo podijeliti na:

1. Uskopojasne – indeks modulacije je m<0.2
2. Širokopojasne – indeks modulacije je m>0.2

Oba navedena tipa modulatora su uskopojasna.

DETEKCIJA UGAONO MODULISANIH SIGNALA

U prijemniku se mora obaviti operacija inverzna modulaciji: iz ugaono modulisanog signala potrebno je izvući originalan signal koji predstavlja poslatu poruku. Ova operacija naziva se ***detekcija*** ugaono modulisanih signala.

Pošto između frekvencijske i fazne modulacije postoji opšta veza, ono što važi za detekciju FM signala može da se primijeni i za ΦM signale:

ΦD = FD + integrator

Detekcija FM signala obavlja se u sklopu koji se naziva ***diskriminator****.* To je sklop čiji izlazni napon linearno zavisi od trenutne učestanosti ulaznog signala, pod uslovom da je amplituda ulaznog FM signala konstantna. Zbog navedenog uslova, ispred diskriminatora se postavlja ***limiter***. To je sklop koji odstranjuje promjene amplituda, i na taj način obezbjeđuje korektan rad diskriminatora.

Proces detekcije FM signala se obavlja u dvije faze:

1. Konverzija frekvencijski modulisanog signala u KAM signal.
2. Demodulacija KAM signala pomoću detektora anvelope.

Pretpostavimo da imamo FM signal:

$$u(t)=U_0\cos\left[\omega_0 t+\Delta\omega_0\int m(t)\,dt\right]$$

Na izlazu iz diskriminatora se dobija:

$$\omega_i=\omega_0+\Delta\omega_0\cdot m(t)=\omega_0+k_\omega u_m(t)$$

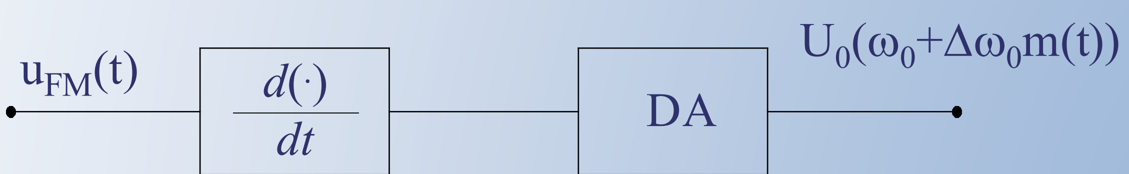
Diferenciranjem FM signala dobija se:

$$\frac{du(t)}{dt}=U_0(\omega_0+\Delta\omega_0 m(t))\sin(\omega_0 t+\Delta\omega_0\int m(t)dt)$$

Signal poruke je sadržan i u amplitudi i u fazi, pa je riječ o hibridno modulisanom signalu. Ako dobijeni signal propustimo kroz detektor anvelope, dobija se:

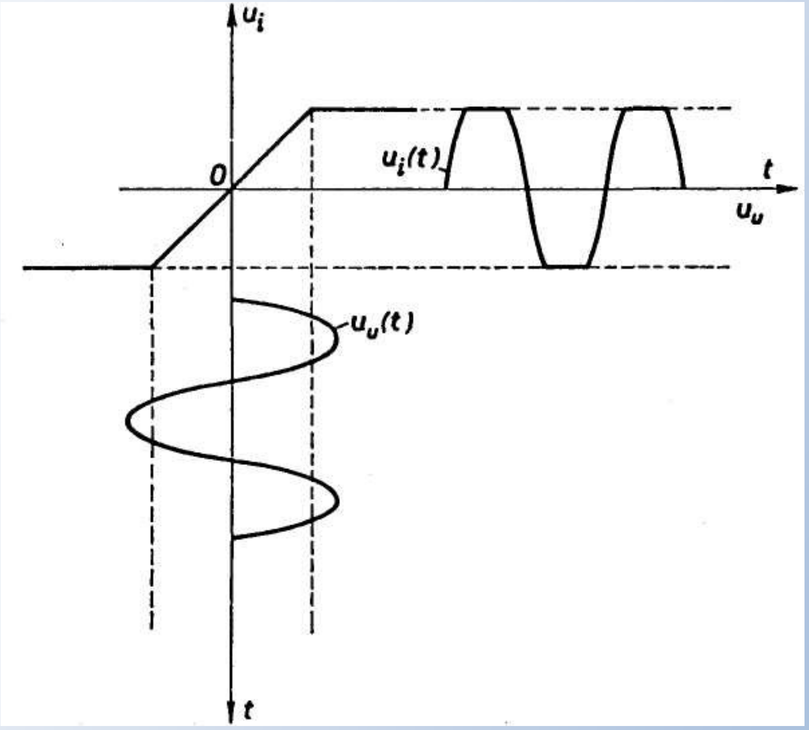
$$u_i(t)=U_0(\omega_0+\Delta\omega_0 m(t))$$

Blok šema diskriminatora je:



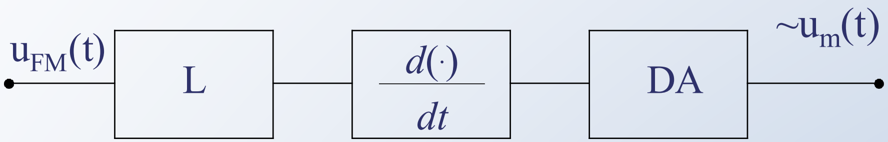
Uslov da detekcija bude realizovana na kvalitetan način je da amplituda ulaznog FM signala bude konstantna. Ako to nije ispunjeno, dobijeni signal na izlazu diskriminatora mijenjaće se sa promjenama te amplitude. Da bi se eliminisala parazitna amplitudska modulacija, ispred diskriminatora se uvijek postavlja sklop čiji je zadatak da štetne varijacije amplitude FM signala učini što manjim. Takav sklop naziva se ***limiter*** ili ***ograničavač*** amplituda.

Limiter je nelinearan sklop čija je karakteristika na slici:

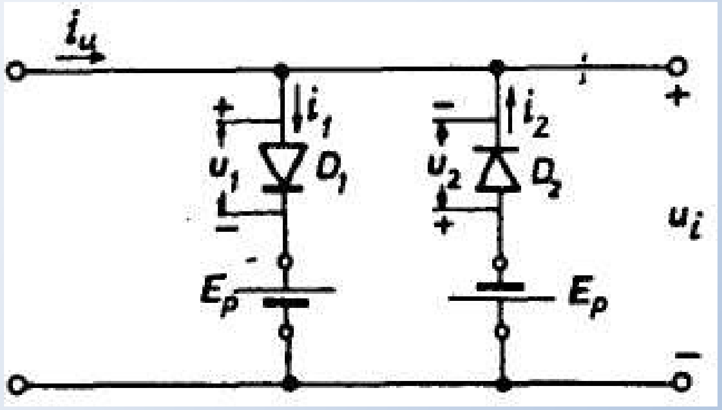


Slika: Idealna karakteristika limitera

Kompletna blok šema sklopa za detekciju će biti:



Sa L je označen limiter koji se može realizovati kao paralelna veza dvije suprotno vezane poluprovodničke diode:



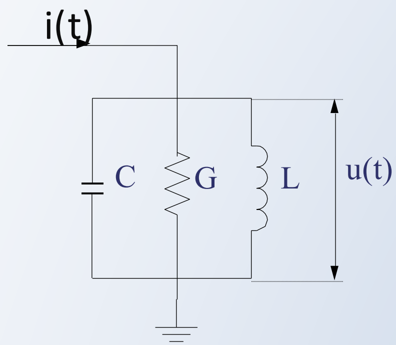
Slika: Šema limitera

U opštem slučaju, diskriminatore možemo podijeliti u dvije grupe:

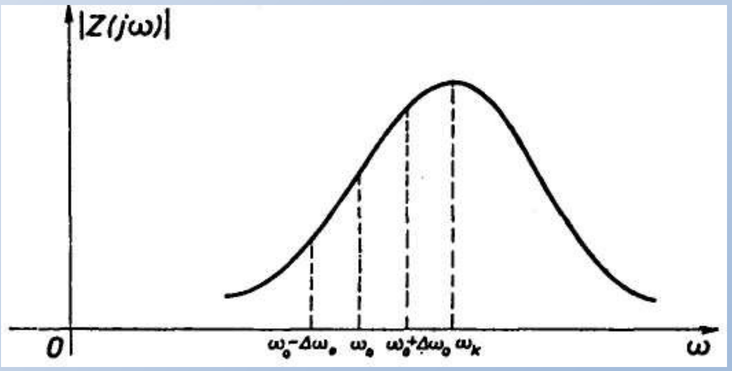
1. Tradicionalni diskriminatori- konverzija FM u KAM signal (diferenciranje) se ostvaruje pomoću oscilatornih kola
2. Moderni diskriminatori- konverzija FM u KAM signal (diferenciranje) se ostvaruje pomoću kola realizovanih u integrisanoj tehnologiji.

1. Tradicionalni diskriminatori

<u>- FM diskriminatori sa oscilatornim kolom</u>



Slika: Oscilatorno kolo koje služi za konverziju FM signala u AM signale



Slika: Zavisnost modula impedanse oscilatornog kola od učestanosti

Amplitudsko-frekvencijska kakakteristika sklopa sa slike je na jednom svom dijelu linearna. Parametre kola treba podesiti tako da je ona linearna u okolini učestanosti nosioca $\omega=\omega_0$, i da oblast linearnosti bude dovoljno velika kako bi se sve vrijednosti učestanosti nalazile unutar nje.

$$|Z(j\omega)| = \frac{|U(j\omega)|}{|I(j\omega)|} = \frac{\frac{1}{G}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}\right)^2}}$$

$$\delta\omega = \omega - \omega_0$$

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \pm \delta$$

Da bi se ispunio uslov linearnosti, mora da je:

$$\delta\omega << \omega_0$$

$$\delta << \omega_0$$

Odnosno, rezonantna učestanost i učestanost nosioca su bliske. Tada je:

$$|Z(j\omega)| \approx \frac{\frac{1}{G}}{\sqrt{1+4\left(\frac{C}{G}\right)^2 (\delta-\delta\omega)^2}}$$

Pretpostavimo da je $\delta >> \delta\omega$, što je neophodno za rad na linearnom dijelu karakteristike. Označimo sa α=G/2C, δ<<α, tada je:

$$|Z(j\omega)| \approx \frac{1}{G}\left[\left(1-\frac{\delta^2}{2\alpha^2}\right)\right]+\frac{\delta}{\alpha^2}\delta\omega$$

$$|U(j\omega)| = |Z(j\omega)||I(j\omega)| \approx \frac{1}{G}|I(j\omega)|\left[\left(1-\frac{\delta^2}{2\alpha^2}\right)+\frac{\delta}{\alpha^2}\,\delta\omega\right]$$

Na izlazu iz oscilatornog kola se dobija signal koji je direktno srazmjeran δω. Ako je amplituda ulaznog signala |I(jω)| konstantna, obezbijeđen je KAM signal koji se dalje propušta kroz detektor anvelope.

2. Moderni diskriminatori

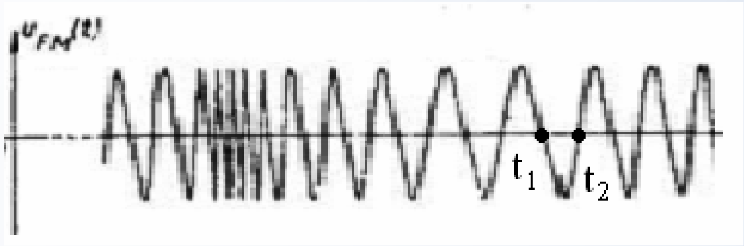
- Detektor presjeka sa nulom

$$u_{FM}(t) = U_o \cos\left(\omega_0 t + k_\omega \int u_m(t)dt\right)$$

t_1 i t_2 su trenuci presjeka FM signala sa nulom. U tim trenucima faze su:

$$\varphi(t_1) = \omega_0 t_1 + k_\omega \int_{t_0}^{t_1} u_m(t)\,dt$$

$$\varphi(t_2) = \omega_0 t_2 + k_\omega \int_{t_0}^{t_2} u_m(t)\,dt$$



$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \pi$$

$$\omega_0(t_2 - t_1) + k_\omega \int_{1}^{t_2} u_m(t)\,dt = \pi$$

Kako je uvijek $f_0 >> f_m$, to se u naznačenom intervalu u_m(t) malo mijenja:

$$u_m(t) \approx const$$

$$\omega_0\,(t_2 - t_1) + k_\omega u_m(t_1)(t_2 - t_1) = \pi$$

$$\left(\omega_0 + k_\omega u_m(t_1)\right)(t_2 - t_1) = \omega_i(t_2 - t_1) = \pi$$

$$\omega_i = \frac{\pi}{(t_2 - t_1)} \qquad f_i \approx \frac{1}{2(t_2 - t_1)}$$

Trenutna učestanost se može odrediti na osnovu poznavanja trenutaka kada funkcija ima vrijednost 0.
Interval u kome brojimo nule mora da bude dovoljno veliki da obuhvati dovoljan broj nula (n), ali i dovoljno mali kako bi se u_m(t) unutar njega sporo mijenjao:

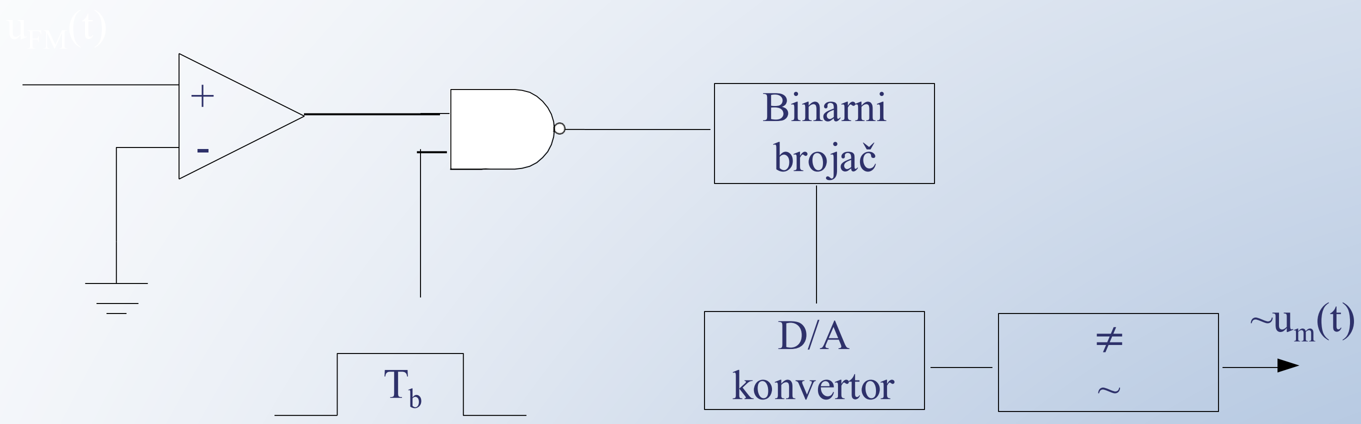
$$\frac{1}{f_0} < T_b \ll \frac{1}{f_m}$$

$$n \approx \frac{T_b}{t_2 - t_1} = \frac{T_b}{\frac{\pi}{\omega_i}} = \frac{T_b}{\pi}\omega_0 + \frac{T_b}{\pi}k_w u_m(t)$$

$$n = n_0 + K u_m(t)$$

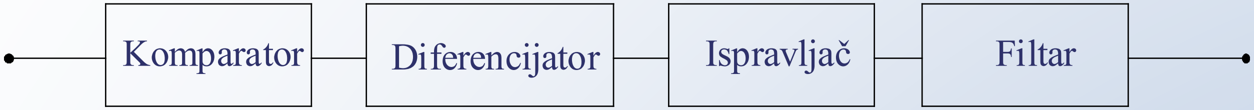
$$\delta n = n - n_0 = K u_m(t)$$

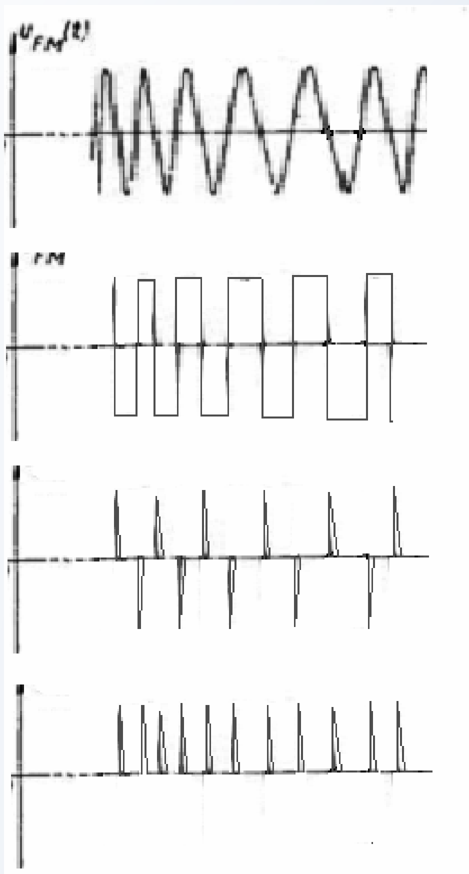
Jedan način realizacije je na slici:



Komparator na izlazu daje pravougaonu povorku koja mijenja polaritet svaki put kad signal prođe kroz nulu. Logička kapija se otvara u intervalu brojanja, pa binarni brojač daje broj presjeka sa nulom. U D/A konvertoru se vrši konverzija cifre u odgovarajuću analognu veličinu.

Drugi način je:





FM signal

Signal na izlazu iz komparatora

Signal na izlazu iz diferencijatora

Signal na izlazu ispravljača